



Lisbon School
of Economics
& Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Economia
2.º Ano/2.º Semestre
2023/2024

Aulas Teóricas N.º 4 e 5 (Semana 3)

Docente: Elisabete Fernandes

E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

Conteúdos Programáticos

Aulas Teóricas
(Semanas 1 a 3)

- **Capítulo 2:**
Probabilidades

Aulas Teóricas
(Semanas 3 a 5)

- **Capítulo 3:** Variáveis Aleatórias Unidimensionais

Aulas Teóricas
(Semanas 5 a 7)

- **Capítulo 4:** Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Aulas Teóricas
(Semanas 8 a 13)

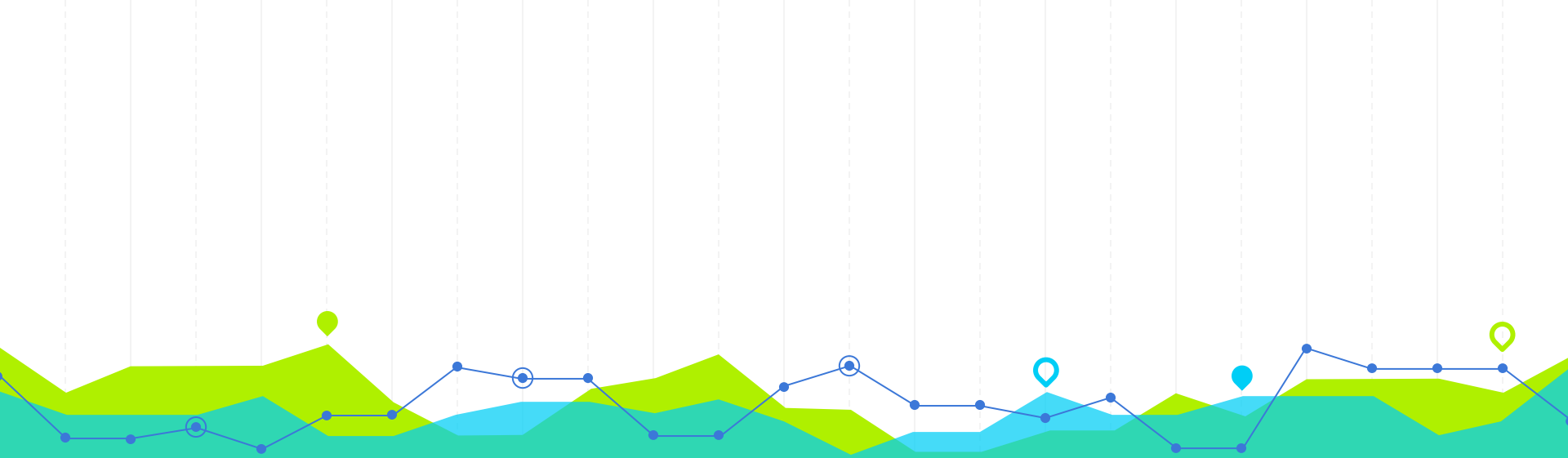
- **Capítulo 5:** Distribuições Teóricas
- **Capítulo 6:** Amostragem. Distribuições por Amostragem.

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>

Aula 1	Apresentação da disciplina. Início do capítulo 1: Experiência aleatória, espaço de resultados, acontecimento. Realização de acontecimento. Álgebra de acontecimentos. Axiomática de Kolmogorov. Propriedades da probabilidade. Exemplo. Interpretações do conceito de probabilidade. Regras de contagem: arranjos, combinações e permutações. A regra fundamental da contagem.
Aula 2	Esquema hipergeométrico e esquema binomial de amostragem. Noção de probabilidade condicionada. Exemplo. Regra da multiplicação das probabilidades. Partição do espaço de resultados. Teorema da probabilidade total.
Aula 3	Teorema de Bayes. Independência.
Aula 4	Início do Capítulo 2: variável aleatória, definição e exemplos. Função de distribuição. Propriedades.



Probabilidade Condicional: Exercícios

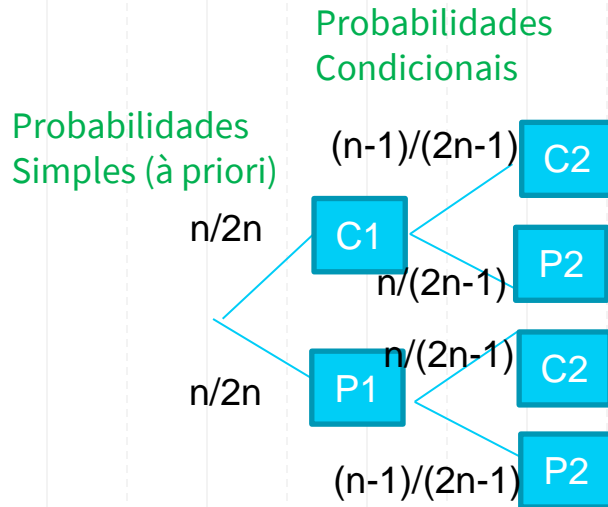
1

2.13 Uma bolsa contém moedas de prata e cobre em igual número. Extrai-se ao acaso e sem reposição duas moedas. Calcule a probabilidade de que:

- (a) A segunda moeda extraída seja de prata, sabendo que a primeira era de cobre.
- (b) Saia uma moeda de prata na 2^a tiragem.
- (c) Uma e uma só das moedas seja de prata.
- (d) Pelo menos uma das moedas seja de cobre.



Exercício 2.13: Diagrama em Árvore



$n = n^\circ$ de moedas de prata = n° de moedas de cobre

Experiência Aleatória: Extração ao acaso e sem reposição de duas moedas

Acontecimentos:

P1/P2 = Moeda de prata na 1ª extração / Moeda de prata na 2ª extração

C1/C2 = Moeda de cobre na 1ª extração / Moeda de prata na 2ª extração

Exercício 2.13 (a)

$n = n^\circ$ de moedas de prata = n° de moedas de cobre

Experiência Aleatória: Extração ao acaso e sem reposição de duas moedas

Acontecimentos:

P2 = Moeda de prata na 2ª extração

C1 = Moeda de cobre na 1ª extração

$$P(P2|C1) = n/(n+n-1) = n/(2n-1)$$

Exercício 2.13 (b)

$n = n^\circ$ de moedas de prata = n° de moedas de cobre

Experiência Aleatória: Extração ao acaso e sem reposição de duas moedas

Acontecimentos:

$$P(P2) = P(P2|C1)P(C1) + P(P2|P1)P(P1) \\ = n/(2n-1) \times n/(2n) + (n-1)/(2n-1) \times n/(2n) = 1/2$$

$P1/P2$ = Moeda de prata na 1ª extração / Moeda de prata na 2ª extração

$C1/C2$ = Moeda de cobre na 1ª extração / Moeda de prata na 2ª extração

Exercício 2.13 (c)

$n = n^\circ$ de moedas de prata = n° de moedas de cobre

Extração ao acaso e sem reposição de duas moedas

P = Moeda de prata

C = Moeda de cobre

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$$

$$\begin{aligned} P(\text{"uma e uma só seja de prata"}) &= P(\text{"de sair uma de prata na segunda tiragem e cobre na primeira"}) + P(\text{"de sair cobre na segunda tiragem e prata na primeira"}) = P(C1P2) + P(P1C2) \\ &= P(P2|C1) \times P(C1) + P(C2|P1) \times P(P1) = n/(2n-1) \times (n/2n) + n/(2n-1) \times (n/2n) \\ &= 2 \times [n/(2n-1) \times (n/2n)] = n/(2n-1) \end{aligned}$$

Exercício 2.13 (d)

$n = n^\circ$ de moedas de prata = n° de moedas de cobre

Extração ao acaso e sem reposição de duas moedas

P = Moeda de prata

C = Moeda de cobre

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$$

$$\begin{aligned} P(\text{"pelo menos uma das moedas seja cobre"}) &= P(C_1C_2) + P(C_1P_2) + P(P_1C_2) \\ &= P(C_2|C_1) \times P(C_1) + P(P_2|C_1) \times P(C_1) + P(C_2|P_1) \times P(P_1) \\ &= [(n-1)/(2n-1)] \times (n/2n) + [n/(2n-1)] \times (n/2n) + [n/(2n-1)] \times (n/2n) \\ &= 1/2[(n-1+n+n)/(2n-1)] = 1/2[(3n-1)/(2n-1)] = (3n-1)/(4n-2) \end{aligned}$$

- 2.14** Uma urna contém 5 bolas brancas e 5 bolas pretas. Dois jogadores, A e B, tiram alternadamente e um de cada de vez uma bola da urna. O jogador que tirar a primeira bola branca ganha a partida.
- (a) Considere a experiência aleatória associada a este jogo e escreva o correspondente espaço de resultados.
 - (b) Calcule a probabilidade de cada jogador ganhar a partida sabendo que o jogador A é o primeiro a tirar a bola de urna.
 - (c) Responda novamente às alíneas (a) e (b) mas agora considerando que as bolas são extraídas com reposição.



Exercício 2.14 (a): Probabilidade Condicional

- **Experiência aleatória**

Seleção SEM reposição de bolas de uma urna com 5 bolas brancas (B) e 5 bolas pretas (P) até que saia a 1a. bola branca.

- **Espaço de resultados**

$\Omega = \{B, PB, PPB, PPPB, PPPPB, P PPPPB\}$

Ω é um conjunto FINITO!

O número de elementos do Universo/Espaço Amostral é 6.

- **Obs.**

$$B \equiv B_1$$

[bola branca à 1a. extracção]

$$PB \equiv P_1 \cap B_2$$

[bola preta à 1a. extracção e bola branca à 2a. extracção]

...

Exercício 2.14 (b): Probabilidade Condicional

- **Eventos**

E_A = jogador A ganhar sabendo que A iniciou o jogo

$$= \{B, PPB, PPPPB\}$$

E_B = jogador B ganhar sabendo que A iniciou o jogo

$$= \overline{E_A} \quad \{PB, PPPB, PPPPB\}$$

- **Prob. pedidas**

Atente-se que

$$P(E_A) = P(B) + P(PPB) + P(PPPPB)$$

eventos disjuntos, ...]

onde

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{\text{no. casos favoráveis a } B}{\text{no. casos possíveis}} \\ &= \frac{5 \text{ bolas brancas}}{10 \text{ bolas}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[probabilidade clássica de Laplace]

Exercício 2.14 (b): Probabilidade Conjunta/Composta/Interseção

$$P(PPB) = P(P_1 \cap P_2 \cap B_3)$$

$$= P(P_1) \times P(P_2 | P_1) \times P[B_3 | (P_1 \cap P_2)]$$

[lei probabilidade composta, probabilidade condicionada]

$$= \frac{5}{10} \times \frac{5-1}{10-1} \times \frac{5}{10-2}$$
$$= \frac{5}{36}$$

$$P(A \cap B) = P(A | B) \times P(B) = P(B | A) \times P(A)$$

$$P(PPPPB) = P(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 \cap B_5)$$

$$= \dots$$

[lei probabilidade composta]

$$= \frac{5}{10} \times \frac{5-1}{10-1} \times \frac{5-2}{10-2} \times \frac{5-3}{10-3} \times \frac{5}{10-4}$$
$$= \frac{5}{252}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Exercício 2.14 (b): Probabilidade Conjunta

Logo

$$\begin{aligned}P(E_A) &= \frac{1}{2} + \frac{5}{36} + \frac{5}{252} \\ &= \frac{83}{126}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(E_B) &= 1 - P(E_A) \\ &= 1 - \frac{83}{126} \\ &= \frac{43}{126}.\end{aligned}$$

Exercício 2.14 (c): Acontecimentos Independentes

- **Experiência aleatória**

Seleção COM reposição de bolas de uma urna com 5 bolas brancas (B) e 5 bolas pretas (P) até que saia a 1a. bola branca.

- **Espaço de resultados**

$\Omega = \{B, PB, PPB, PPPB, P PPPB, P PPPPB, \dots\}$

Ω é um conjunto INFINITO NUMERÁVEL!

As extrações com reposição são extrações independentes.

- **Eventos**

$$E_A = \{B, PPB, P PPPB, \dots\}$$

$$E_B = \overline{E_A}$$

$$P(\text{"sair bola preta"}) = P(\text{"sair bola branca"}) = 5/10 = 1/2$$

- **Prob. pedidas**

Para já,

$$P(E_A) = P(B) + P(PPB) + P(P PPPB) + \dots$$

[eventos disjuntos, ...]

Ora,

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{5 \text{ bolas brancas}}{10 \text{ bolas}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercício 2.14 (c): Acontecimentos Independentes

e, por lidarmos com uma extracção COM reposição, temos

$$\begin{aligned}P(PPB) &= P(P_1 \cap P_2 \cap B_3) \\&= P(P_1) \times P(P_2 | P_1) \times P[B_3 | (P_1 \cap P_2)] && \text{[lei probabilidade composta, ...]} \\&= \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} \\&= \left(\frac{1}{2}\right)^3\end{aligned}$$

Os acontecimentos A e B são independentes sse $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$\begin{aligned}P(PPPPB) &= P(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 \cap B_5) \\&= \dots && \text{[lei probabilidade composta, ...]} \\&= \left(\frac{1}{2}\right)^5.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}P(E_A) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1} \\&= \frac{1}{2} \times \sum_{i=0}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^i\end{aligned}$$

Série geométrica de razão r .
Se $|r| < 1$ então a série é convergente.

$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j = \frac{1}{1-r}$$

Exercício 2.14 (c): Acontecimentos Independentes

$$\begin{aligned}P(E_A) &= \frac{1}{2} \times \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 \right]^0 \times \frac{1 - \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 \right]^{+\infty}}{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(E_B) &= 1 - P(E_A) \\ &= 1 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Comentário

Uma vez que $P(E_A) > P(E_B)$ em (b) e (c), concluímos que há sempre vantagem em jogar em 1o. lugar quer se faça reposição, quer não.

Série geométrica de razão r .
Se $|r| < 1$ então a série é convergente.

$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j = \frac{1}{1-r}$$

2.16 A execução de um projecto de construção de um edifício no tempo programado está relacionada com os seguintes acontecimentos:

E = “escavação executada a tempo”

F = “fundações executadas a tempo”

S = “superestrutura executada a tempo”

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

supostos independentes e com probabilidades iguais a, respectivamente, 0.8, 0.7 e 0.9. Calcule a probabilidade de:

- (a) O edifício ser terminado no tempo previsto, devido ao cumprimento dos prazos nas três actividades referidas.
- (b) O prazo de execução ser cumprido para a escavação e não ser cumprido em pelo menos uma das outras actividades.



Exercício 2.16 (a)

Acontecimentos:

E = “escavação executada a tempo”

F = “fundações executadas a tempo”

S = “superestrutura executada a tempo”

Acontecimentos independentes

$$P(E) = 0,8$$

$$P(F) = 0,7$$

$$P(S) = 0,9$$

Definição 1.6 (Acontecimentos independentes). $A, B \subset \Omega$ dizem-se independentes sse

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Propriedades Se $A, B \subset \Omega$ independentes, então

1. \bar{A}, B são independentes,
2. A, \bar{B} são independentes,
3. \bar{A}, \bar{B} são independentes.

$$P(\text{“Construção do edifício terminou no tempo previsto”}) = P(E) \times P(F) \times P(S) = 0,504$$

Exercício 2.16 (b)

P("O prazo de execução ser cumprido para a escavação e não ser cumprido em pelo menos uma das outras atividades")

$$\begin{aligned} &= P(E) \times P(\sim F) \times P(S) + P(E) \times P(F) \times P(\sim S) + P(E) \times P(\sim F) \times P(\sim S) \\ &= 0,8 \times 0,3 \times 0,9 + 0,8 \times 0,7 \times 0,1 + 0,8 \times 0,3 \times 0,1 = 0,296 \end{aligned}$$

Definição 1.6 (Acontecimentos independentes). $A, B \subset \Omega$ dizem-se independentes sse

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Propriedades Se $A, B \subset \Omega$ independentes, então

1. \bar{A}, B são independentes,
2. A, \bar{B} são independentes,
3. \bar{A}, \bar{B} são independentes.



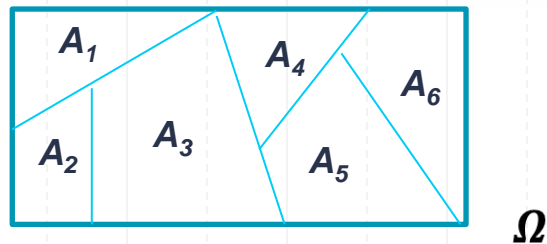
Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes

2

Definição de Partição

Diz-se que os acontecimentos A_1, A_2, \dots, A_n constituem uma partição de Ω se e só se:

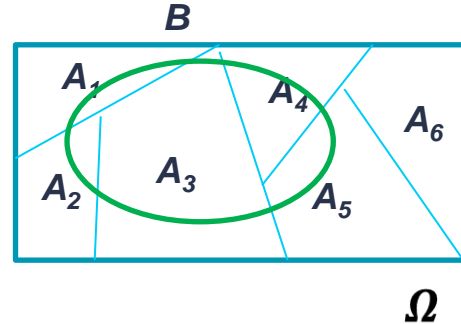
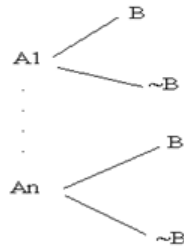
- A_1, A_2, \dots, A_n são mutuamente incompatíveis, isto é,
 $A_i \cap A_j = \emptyset; i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j;$
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega.$



Teorema/Lei da Probabilidade Total

Se A_1, A_2, \dots, A_n definem uma partição sobre Ω , então para qualquer B definido em Ω temos:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P[B|A_i] \times P(A_i) = P[B|A_1] \times P(A_1) + P[B|A_2] \times P(A_2) + \dots + P[B|A_n] \times P(A_n)$$



Se a partição é A, \bar{A} , então tem-se o caso especial

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

Nota: Aplica-se este teorema quando se quer calcular a probabilidade de ocorrência de um efeito originado por várias causas.

Teorema de Bayes (ou Teorema da Probabilidade Inversa)

Se A_1, A_2, \dots, A_n definem uma partição sobre Ω , então para qualquer B definido em Ω temos:

$$P[A_i|B] = \frac{P[B|A_i] \times P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P[B|A_i] \times P(A_i)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)} \quad i=1,2,\dots,n.$$

Teorema da Probabilidade Total

Quando a partição de A é \bar{A} , tem-se o caso especial

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}.$$

Nota: Aplica-se este teorema quando se quer calcular a probabilidade de ter sido A_k que originou B .



Teorema de Bayes: Exemplo

1 Probabilidade condicional

2 Probabilidades a priori

Seja

M = doença meningite

S = dor no pescoço

Um Doutor sabe:

$$P(S|M) = 0.5$$

$$P(M) = 1/50000$$

$$P(S) = 1/20$$

$$P(M|S) = \frac{P(S|M)P(M)}{P(S)}$$

$P(S)$

$$= \frac{0,5 * (1/50000)}{1/20} = 0,0002$$

1/20

A probabilidade de uma pessoa ter meningite dado que ela está com dor no pescoço é 0,02% ou ainda 1 em 5000.

<https://www.dei.isep.ipp.pt/~csr/SP/SP-Bayes.ppt>



Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes: Exercícios

3

Exercício Suplementar que não consta do livro Murteira et al (2015)

- 2.18** Um geólogo crê que existe petróleo numa certa região com probabilidade 0.8 e que, caso haja petróleo, a probabilidade de sair petróleo na primeira perfuração é de 0.5.
- (a) Qual a probabilidade de sair petróleo na primeira perfuração?
 - (b) Tendo-se procedido à primeira perfuração da qual não resultou petróleo, qual é a nova probabilidade atribuída à existência de petróleo na região?

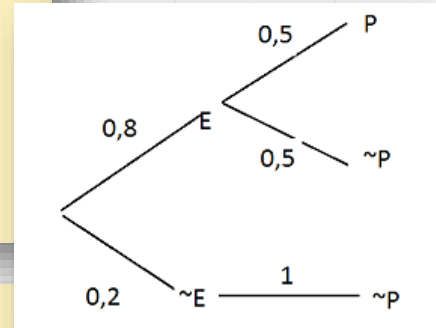


Exercício 2.18 (a): Lei da Probabilidade Total

- Quadro de eventos e probabilidades

Evento	Probabilidade
$E = \{\text{existe petróleo}\}$	$P(E) = 0.8$
$P = \{\text{sair petróleo na primeira perfuração}\}$	$P(P) = ?$
	$P(P E) = 0.5$
	$P(P \bar{E}) = 0$

Partição: $\{P, \sim P\}$



- Prob. pedida

Os acontecimentos E e \bar{E} constituem uma partição do espaço de resultados Ω .

Tirando partido desta partição e da lei da probabilidade total, tem-se:

$$\begin{aligned} P(P) &= P(P | E) \times P(E) + P(P | \bar{E}) \times P(\bar{E}) \\ &= 0.5 \times 0.8 + 0 \times 0.2 \\ &= 0.4. \end{aligned}$$

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

Exercício 2.18 (b): Teorema de Bayes

- Prob. pedida

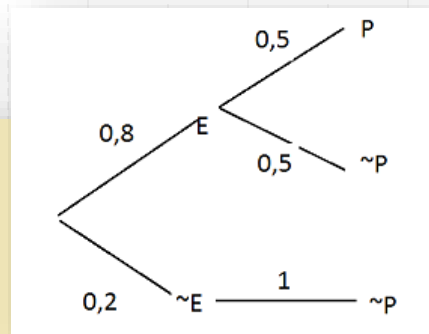
Invocando o teorema de Bayes, obtemos:

$$\begin{aligned}P(E | \bar{P}) &= \frac{P(\bar{P} | E) \times P(E)}{P(\bar{P})} \\ &= \frac{[1 - P(P | E)] \times P(E)}{1 - P(P)}\end{aligned}$$

$$\stackrel{(a)}{=} \frac{(1 - 0,5) \times 0,8}{1 - 0,4}$$

Alínea (a)

$$= \frac{2}{3}$$



$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$$

2.20 Para um certo tipo de cancro a taxa de prevalência (proporção de doentes na população em geral) é 0.005. Um teste diagnóstico para esta doença é tal que:

- a probabilidade do teste resultar positivo quando aplicado a um indivíduo com cancro (sensibilidade do teste) é 0.99;
- a probabilidade do teste resultar negativo quando o indivíduo não tem cancro (especificidade do teste) é 0.95.

- (a) Calcule o valor preditivo do teste, isto é, a probabilidade de um indivíduo ter cancro sabendo que o teste resultou positivo.
- (b) Supondo que o teste foi aplicado duas vezes consecutivas ao mesmo doente e que das duas vezes o resultado foi positivo, calcule a probabilidade do doente ter cancro (admita que, dado o estado do indivíduo, os resultados do teste em sucessivas aplicações, em qualquer indivíduo, são independentes). O que pode concluir quanto ao valor preditivo da aplicação do teste duas vezes consecutivas?



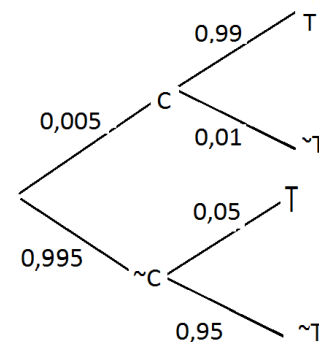
Exercício 2.20 (a): Teorema de Bayes

• Quadro de eventos e probabilidades

Evento	Probabilidade
$C = \{\text{paciente com cancro}\}$	$P(C) = \text{prevalência da doença} = 0.005$
$T = \{\text{teste positivo}\}$	$P(T) = ?$
	$P(T C) = \text{sensibilidade do teste} = 0.99$
	$P(\bar{T} \bar{C}) = \text{especificidade do teste} = 0.95$

• Prob. pedida

$$\begin{aligned}
 P(C | T) &\stackrel{\text{Teo. Bayes}}{=} \frac{P(T | C) \times P(C)}{P(T)} \\
 &= \frac{P(T | C) \times P(C)}{P(T | C) \times P(C) + P(T | \bar{C}) \times P(\bar{C})} \\
 &= \frac{P(T | C) \times P(C)}{P(T | C) \times P(C) + [1 - P(\bar{T} | \bar{C})] \times [1 - P(C)]} \\
 &= \frac{0.99 \times 0.005}{0.99 \times 0.005 + (1 - 0.95) \times (1 - 0.005)} \\
 &\approx 0.0905.
 \end{aligned}$$



$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B | A)P(A) + P(B | \bar{A})P(\bar{A})}$$

Exercício 2.20 (b): Teorema de Bayes

- **Prob. pedidas**

Ao invocarmos o teorema de Bayes, bem como a independência condicional, que se traduz em

$$T_1 | C \perp\!\!\!\perp T_2 | C$$

$$T_1 | \bar{C} \perp\!\!\!\perp T_2 | \bar{C},$$

i.e.,

$$P[(T_1 \cap T_2) | C] = P(T_1 | C) \times P(T_2 | C)$$

$$P[(T_1 \cap T_2) | \bar{C}] = P(T_1 | \bar{C}) \times P(T_2 | \bar{C}),$$

o valor preditivo de dois testes aplicados consecutivamente é dado por

$$P[C | (T_1 \cap T_2)] \stackrel{\text{Teo. Bayes}}{=} \frac{P[(T_1 \cap T_2) | C] \times P(C)}{P(T_1 \cap T_2)}$$

$$= \frac{P[(T_1 \cap T_2) | C] \times P(C)}{P[(T_1 \cap T_2) | C] \times P(C) + P[(T_1 \cap T_2) | \bar{C}] \times P(\bar{C})}$$

$$\stackrel{\text{indep. cond.}}{=} \frac{P(T_1 | C) \times P(T_2 | C) \times P(C)}{P(T_1 | C) \times P(T_2 | C) \times P(C) + P(T_1 | \bar{C}) \times P(T_2 | \bar{C}) \times P(\bar{C})}$$

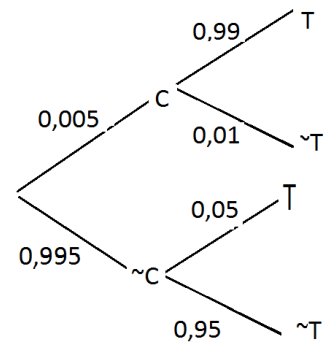
$$= \frac{P(T_1 | C) \times P(T_2 | C) \times P(C)}{P(T_1 | C) \times P(T_2 | C) \times P(C) + [1 - P(\bar{T}_1 | \bar{C})] \times [1 - P(\bar{T}_2 | \bar{C})] \times [1 - P(C)]}$$

$$= \frac{0,99 \times 0,99 \times 0,005}{0,99 \times 0,99 \times 0,005 + (1 - 0,95) \times (1 - 0,95) \times (1 - 0,005)}$$

$$\approx 0,6633.$$

- **Comentário**

O valor preditivo aumentou substancialmente ao aplicarmos dois testes consecutivos.



$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B | A)P(A) + P(B | \bar{A})P(\bar{A})}$$

Obrigada!

Questões?

